НАИЛУЧШИЕ ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И МЕТОД БАКУСА–ГИЛЬБЕРТА

(совместно с Г.А. Рыжиковым)[*]

Статьи Бакуса и Гильберта, появившиеся в 1967–1970 гг. [1–3], вызвали интерес у геофизиков, которых привлекали как сама идея конструирования алгоритма интерпретации наблюдений[1], так и возможность получения количественных характеристик алгоритма[2] (таких как разрешающая длина – resolving lenght, ошибка–error) и связи между ними. Так, уже на конференции 1971 г. [4] были представлены три работы, опирающиеся на метод Бакуса-Гильберта (метод Б–Г). В то же время, – и этот факт отмечался рядом авторов работ (см., например, [5, 6]), – метод Б–Г не свободен от существенных недостатков, которые связывались (как мы показали, справедливо) с наличием в методе некоторой свободы в выборе весовой функции $s(x,x_0)$, определяющей меру разрешающей длины и критерий оптимальности алгоритма. Тем не менее, поток работ, в которых использовался метод Б–Г, не только не иссяк, но и обрел силу: утвердился выбор весовой функции $(s(x,x_0)=(x-x_0)^2)$ и в этой конкретной форме (по нашему мнению, наиболее неудачной) описание метода вошло в ряд монографий и учебников (например, [7–14]).

Эти причины и побудили авторов настоящей статьи показать на примере свойств достаточно широкого класса оценок линейных функционалов, что идеология метода Б–Г является далеко не безупречной. Являясь врожденными, дефекты заложены в самой основе метода.

1. Постановка задачи интерпретации наблюдений

Наблюдения геофизического поля ρ в самом общем случае[3] представляет собой множество (конечное) нелинейных функционалов:

* Работа прежде не публиковалась.

1 Метод позволял наглядно представить структуру алгоритма.

2 Соответственно характеристик возможностей интерпретации наблюдений.

3 Например, поля скорости сейсмических волн как функций пространственных координат, поля проводимости земных пород как функции пространственных координат и частоты зондирующего электромагнитного поля и т. д.

$$\tilde{U}=\left\{\tilde{u}_i=\tilde{u}_i(\tilde{\rho},\tilde{\varepsilon}),\, i=1,2,\dots,n,\ \rho\in P,\ \tilde{\varepsilon}\in\tilde{N}\right\},$$

где $\tilde{u}_i$ – число, полученное в результате i-го измерения, $\rho(x)$ – исследуемое поле, $\tilde{\varepsilon}$ – случайные функции, описывающие как недетерминируемость, так и недетерминированность связи поля ρ и выбранного метода наблюдений $\{\tilde{u}_i\}$. Конечность множества наблюдений делает бессмысленной попытку восстановления функции $\rho(x)$, – речь может идти лишь о конечном числе параметров, – а неизбежное наличие $\tilde{\varepsilon}$ превращает любую задачу интерпретации наблюдений в задачу статистического оценивания[4].

Модель наблюдений. Записывая (формальное) разложение в ряд Тейлора функционала $\tilde{u}_i$:

$$u_i(\tilde{\rho},\tilde{\varepsilon})=u_i(\tilde{\rho}_0,\tilde{\varepsilon}_0)+\frac{\delta}{\delta\tilde{\rho}}u_i(\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0)-\frac{\delta}{\delta\tilde{\varepsilon}}u_i(\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}_0)$$

и вводя обозначения

$$u_i=u_i(\rho,\varepsilon)-u_i(\rho_0,\varepsilon_0),$$
$$\rho=\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0,$$
$$\varphi_i=\frac{\delta}{\delta\tilde{\rho}}u_i,$$
$$\varepsilon_i=\frac{\delta}{\delta\tilde{\varepsilon}}u_i(\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}_0),$$

представим линеаризацию отображения $\tilde{U}_i$ в форме

$$U=\{u_i=\varphi_i(\rho)+\varepsilon_i\},\qquad i=1,2,\dots,n.$$

Полагая функционалы φ_i непрерывными (наблюдения выбираются так, что конечными вариациями поля ρ соответствуют конечные вариации наблюдений), запишем i-е наблюдение:

$$u_i=\int\varphi_i(x)\rho(x)dx+\varepsilon_i\,. \tag{1}$$

4 Задача восстановления функции $\rho(x)$ бессмысленна и по другой причине: реально отсутствуют как возможность, так и потребность переработки **бесконечной** информации, содержащейся в абсолютно точном задании функции ρ; в крайнем случае потребности ограничиваются алгоритмическим заданием функции $\rho(x)$, например, $\rho(x)=ax^2+bx+c$, но и этот случай исключается при интерпретации **реальных** измерений: ошибки $\tilde{\varepsilon}$ возникают по меньшей мере в силу того, что результат любого измерения – число, содержащее **конечное** множество значащих цифр.