где $\bar{\Phi}^T$ – оператор, сопряженный оператору $\bar{\Phi}$ (1а) по Лагранжу:

$$\bar{u}_T^T\bar{\Phi}(\rho)=\bar{\Phi}^T\bar{u}(\rho)\equiv\nu(\rho),\qquad \nu\in P^*,\qquad \text{т.е. } \bar{\Phi}^T: R^n\to P^*.$$

Окончательно качество оценки определяется монотонной функцией от $\tilde{e}^2$; при этом оценку можно считать наилучшей (оптимальной), если аргумент $\tilde{e}^2$ принимает минимальное значение, т.е. критерий оптимальности оценки можно сформулировать в следующем виде:

оценка $\hat{\bar{a}}$ оптимальна, если

$$\hat{\bar{a}}=\arg\inf_{\bar{a}\in R^n}\tilde{e}^2_{\bar{a}}. \qquad (6)$$

Оптимальные оценки и параметризация. Полагая оператор W таким, что $W>0$, оптимальную оценку $\hat{\psi}=\psi_{\hat{\bar{a}}}$ можно записать (для любого S) в форме

$$\hat{\psi}=\bar{u}^TU_{\tilde{e}}\bar{u}_r, \qquad (7а)$$

где $U_{\tilde{e}}=\bar{\Phi}S\bar{\Phi}_T+W$, и «реперное наблюдение» $u_r\equiv\bar{\Phi}(S\psi)\equiv\bar{\Phi}(\rho_r)$; или

$$\hat{\psi}=\int\psi(x)\hat{\rho}(x)dx=\psi(\hat{\rho}), \qquad (7б)$$

где $\hat{\rho}(x)=S\bar{\Phi}^T(\bar{\Phi}S\bar{\Phi}^T+W)^{-1}\bar{u}$,

и соответствующую оптимальной оценке ошибку $\tilde{e}^2$ можно представить в следующем виде:

$$\tilde{e}^2=\psi(S\psi)-\bar{u}_r^TU_{\tilde{e}}^{-1}\bar{u}_r=\|\psi\|_S^2-\|u_r\|^2_{U_{\tilde{e}}^{-1}} \qquad (8a)$$

или, обозначая $S-S\bar{\Phi}^T(\bar{\Phi}S\bar{\Phi}^T+W)^{-1}\bar{\Phi}S$ через $\hat{S}$, в виде

$$\tilde{e}^2=\|\psi\|^2_{\hat{S}}. \qquad (8б)$$

Из выражений для $\tilde{e}^2$ видно, что из данного комплекса наблюдений (1а) невозможно оценить параметры ψ поля ρ такие, что

1) $\|\psi\|^2_{\hat{S}}$ из (8б) не ограничена (наилучшая оценка имеет бесконечную ошибку $\tilde{e}^2$);

2) $\|u_r\|^2_{U_{\tilde{e}}^{-1}}$ из (8а) равна нулю[9] (наилучшая оценка имеет $\tilde{e}^2$, равную $\|\psi\|^2_S=\psi(\rho_r)$, не зависящую от комплекса наблюдений)[10].

Построив оптимальную оценку параметра ψ, можно записать оценку для группы параметров $\{\psi_\alpha,\alpha=1,2,...,k\}$:

$$\hat{\bar{\psi}}=\int\bar{\psi}(x)\hat{\rho}(x)dx, \qquad (9)$$

здесь $\bar{\psi}=\|\psi_1,\psi_2,...\psi_k\|^T$, $\hat{\rho}(x)$ из (7б).

Суммарная ошибка $\tilde{e}^2(\bar{\psi})$ для группы параметров $\bar{\psi}$ равна при этом следу k-мерной матрицы:

$$\tilde{e}^2(\bar{\psi})=\sum_\alpha\tilde{e}^2(\psi_\alpha)=Tr\bar{\psi}\hat{S}\bar{\psi}^T, \qquad (10)$$

где использован оператор $\hat{S}$ из (8б).

Ясно, что оценки параметров $\bar{\psi}$, являющиеся оптимальными для данного комплекса наблюдений U, будут определяться множеством $\hat{P}\ni\rho$, для характеристики которого был введен оператор S (пусть неизвестный, но фиксированный): оптимальные оценки (9) в явном виде включают оператор S, т.е. $\hat{\bar{\psi}}=\hat{\bar{\psi}}(\hat{P}_S)$.

И наоборот: если построить произвольным образом оценки параметров $\bar{\psi}$, эти оценки будут **оптимальными** для **своего** множества $\hat{P}_S$, т.е. $\hat{P}_S=\hat{P}_S(\hat{\bar{\psi}})$.

Так, оценка $\bar{\psi}$, совпадающая с оценкой (9), где в качестве оператора S использован оператор S_0 из примера 1 (с. 369), будет оптимальной, если $\hat{P}_S(\hat{\bar{\psi}})=\{\rho:\rho=\rho^0(x)\}$. Если в качестве S использовать S_T из примера 2, $\hat{P}_S(\bar{\psi})=\left\{\rho:\|\tilde{\rho}\|^2_{S_T^{-1}}\le C_\alpha\right\}$, при этом

---

[9] Например, параметры ψ, для которых $\bar{u}_r=\bar{\Phi}(S\psi)=0$, т.е. $\rho_r\in\bigcap_i N(\varphi_i)$; в частности оцениваемым параметром не может быть значение поля ρ в точке, если φ_i такова, что $\varphi_i(x)$ в (2) – гладкие функции.

[10] Выражения (8а) и (8б) доказывают содержательность задачи параметризации исследуемого поля (см. примеч. 6).