смысл $b^2_{\hat{\hat{a}}}$ из (4): $b^2_{\hat{\hat{a}}} = \sup b^2(\tilde{\rho})$, $\tilde{\rho} \in \hat{P} = \left\{\tilde{\rho} : \|\tilde{\rho}\|^2_{S_T^{-1}} = Ca\right\}$, аналогично $b^2_{\hat{\hat{a}}}$ для примера 3: $b^2_{\hat{\hat{a}}} = \sup b^2_{\hat{\hat{a}}}$, $\tilde{\rho} \in \left\{\tilde{\rho} : E\|\rho\|^2_{K_\rho^{-1}} = C_a\right\}$ [11].

Один класс оптимальных линейных оценок: частично-несмещенные оценки. Из выражения (5) видно, что в общем случае смещения оценки не избежать, но правомерна следующая постановка задачи оценивания: потребуем, чтобы оценка была для любого оцениваемого функционала несмещенной на некоторых «модельных» функциях поля $\rho(x) = \rho_m$ [12].

Другими словами, оптимальная (частично-несмещенная) оценка $\vec{a}_m$ должна удовлетворять критерию

$$\hat{\hat{a}}_m = \arg\inf_{\vec{a} \in \hat{R}^n_M} \tilde{e}^2 , \tag{11а}$$

где $\hat{R}^n_M = \{\vec{a} : b_{\vec{a}}(\rho_M) = 0\} = R^{n-1}$; или, используя множитель Лагранжа λ,

$$\begin{cases} \hat{\hat{a}}_M = \arg\inf\limits_{\vec{a} \in \hat{R}^n_M} \left\{ \|\psi - \bar{\Phi}^T \vec{a}\|^2_S + \|a\|^2_W + \lambda\left[\psi(\rho_M) - \vec{a}^T \bar{\Phi}(\rho_M)\right] \right\} \\ \lambda : \int \vec{a}^T \vec{\varphi}(x) \rho_M(x) dx = \int \psi(x) \rho_M(x) dx. \end{cases} \tag{11б}$$

Оптимальную частично-несмещенную оценку $\hat{\psi}_M$ можно представить следующим образом:

$$\hat{\psi}_M = \vec{u}^T U_\varepsilon^{-1} (\vec{u}_r + \lambda_M \vec{u}_M) \quad , \tag{12}$$

где $\vec{u}_M$ – «модельное наблюдение»: $\vec{u}_M = \bar{\Phi}(\rho_M)$, а $\lambda_M = \dfrac{\psi(\rho_M) - \vec{u}_r^T U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M}{\vec{u}_M^T U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M}$ [13].

[11] Ср. С оценкой функционала по методу Марчука [15]: оценка функционала ($\hat{a}$ – «функция ценности») строится как решение уравнения $\psi = \bar{\Phi}^T \vec{a}$, т. е. $\hat{\vec{a}} = \arg\inf_{\vec{a}} \|\psi - \bar{\Phi}^T \vec{a}\|^2_{S_M}$, где S_M=**I** – изометрический оператор.

[12] Например, равных тождественно константе на всем интервале.

[13] Отсюда условие на «модельное поле» $\rho_M(x)$: $\|\bar{\Phi}(\rho_M)\|^2_{U^{-1}} \neq 0$.

При этом вектор оценки $\vec{a}_M$:

$$\hat{\vec{a}}_M = \left[I - \frac{U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M \vec{u}_M^T}{\vec{u}_M^T U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M} \right] U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_r + \psi(\rho_M) \frac{U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M}{\vec{u}_M^T U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M} , \tag{13}$$

а увеличение квадрата ошибки $\tilde{e}^2_M$ по сравнению с $\tilde{e}^2$ (8б):

$$\Delta\tilde{e}^2 = \tilde{e}^2_M - \tilde{e}^2 = \lambda^2_M \|\vec{u}_M\|^2_{U_\varepsilon^{-1}} = \frac{\left[\psi(\rho_M) - \vec{u}_M^T U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_r\right]^2}{\vec{u}_M^T U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M} . \tag{14}$$

Отметим здесь, что аналогично представлению (7б) оценку (12) можно переписать:

$$\hat{\psi}_M = \int \psi(x) \hat{\rho}_M(x) dx = \psi(\hat{\rho}_M) , \tag{15}$$

где $\hat{\rho}_M = \hat{\rho}(\vec{u}_{reduced}) + \mu\rho_M = \hat{\rho}(\vec{u} - \mu\vec{u}_M) + \mu\rho_M$

(введены обозначения $\mu = \mu(\vec{u}) = \dfrac{u_M^T U_\varepsilon^{-1}}{\vec{u}_M^T U_\varepsilon^{-1} \vec{u}_M} \vec{u}$, $\vec{u}_{reduced} = \vec{u} - \mu\vec{u}_M$; $\hat{\rho}$ вычисляется согласно (7б), в которой правая часть $\vec{u}$ заменена на $\vec{u}_{reduced}$).

3. Метод Бакуса–Гильберта

Изложение метода Б–Г приведем в форме, получившей наибольшее распространение. Формулировка задачи совпадает с формулировкой (2). Конкретная форма функционала, который требуется оценить (и для которого был создан метод Б–Г): $\psi_a = \psi_{x_0}(\rho) : \psi_{x_0}(\rho) = \rho(x_0)$, – или, употребляя для записи функционала ψ_{x_0} δ-функцию Дирака:

$$\psi_{x_0}(\rho) = \int \delta(x - x_0) \rho(x) dx .$$

Сознавая тот факт, что подобрать линейную комбинацию, $\sum a_i \varphi_i(x)$ совпадающую с $\delta(x-x_0)$, невозможно ($\sum a_i \varphi_i(x) \neq \delta(x-x_0)$), Бакус и Гильберт при построении оценки ввели условие интегрального равенства