$$\int\left[\sum a_i\varphi_i(x)\right]dx = \int\left[\delta(x-x_0)\right]dx = 1, \tag{16}$$

благодаря чему функция $\sum a_i\varphi_i(x)$ приобретает смысл осредняющего ядра[14] averaging kernel.

Поскольку условие (16) лишь интегральное, в качестве меры локализации функции $\sum a_i\varphi_i(x)$ была использована величина

$$S_{\vec a}^2 = k\int\left[\sum a_i\varphi_i(x)\right]^2 s(x,x_0)dx, \tag{17}$$

где численная величина $S_{\vec a}^2$ («spread») определена с точностью до множителя k.

Как уже указывалось во введении, если в первых работах оставалась некоторая свобода в выборе весовой функции $s(x, x_0)$ (авторам метода казалось, что вид весовой функции не существенен для оценки), то в последующих в качестве $s(x, x_0)$ была выбрана $s(x, x_0) = (x-x_0)^2$, и поскольку ясно, что конкретный вектор $\vec a$ в линейной комбинации $\vec a^T\vec u$ индуцирует «шум» (3) $\bar n = \vec a^T\vec\varepsilon$ (у Б–Г термин error применен к $En_{\vec a,\vec\varepsilon}^2$), оптимальная оценка в методе Б–Г удовлетворяет критерию:

$$\vec a_{BG} = \arg\inf_{\vec a\in\widehat R^n}\left\{k\int\left[\sum a_i\varphi_i(x)\right]^2(x-x_0)^2dx + \vec a^TW\vec a\right\} = \arg\inf_{\vec a\in\widehat R^n}(S_{\vec a}^2 + n_{\vec a}^2),$$

$$\widehat R^n = R^{n-1} = \left\{\vec a : \int\sum a_i\varphi_i(x)dx = 1\right\} \tag{18}$$

(здесь $S_{\vec a}^2$ из уравнения (17) и $n_{\vec a}^2$ из уравнения (4)).

Проанализируем оценку $\hat{\vec a}_{BG}$, используя свойства оценок функционалов, установленные в п.2. Перепишем для этого критерий (18) в виде

$$\begin{aligned}\vec a_{BG} &= \arg\inf_{\vec a}\left\{k\int dx\left[\sum a_i\varphi_i(x)\right]^2(x-x_0)^2 + \bar n_{\vec a}^2\right\} =\\ &= \arg\inf_{\vec a}\left\{\int dx\left[\sum a_i\varphi_i(x) - \psi_{x_0}\right]\int S_{BG}^{x_0}(x,x')\left[\sum a_i\varphi_i(x) - \psi_{x_0}\right]dx + \bar n_{\vec a}^2\right\},\end{aligned} \tag{18a}$$

где $S_{BG}^{x_0}(x, x') = k(x-x_0)(x'-x_0)\delta(x-x')$[15].

Условие (16) перепишем:

$$\int\left[\sum a_i\varphi_i(x) - \delta(x-x_0)\right]dx = \int\left[\sum a_i\varphi_i(x) - \delta(x-x_0)\right]\rho_M(x)dx = 0 \tag{16a}$$

(здесь $\rho_M(x) \equiv \text{const}$).

В результате критерий оптимальности оценки Б–Г принимает уже известную форму (11а):

$$\hat{\vec a}_{BG} = \arg\inf_{\vec a\in\widehat R^n}\left\{\left\|\vec\Phi^T\vec a - \psi_{x_0}\right\|_S^2 + \left\|\vec a\right\|_W^2\right\},$$

$$\widehat R^n = \left\{\vec a : b_{\vec a}(\rho_M) = 0\right\} \tag{18б}$$

и понятие оптимальности оценки Б–Г очевидное: оценка Б–Г оптимальна в том случае, если она не смещена на «модельных функциях» поля $\rho_M(x)$ (тождественно равных константе на всем интервале x) и обеспечивает минимум суммы $\bar n_{\vec a}^2$ (связанной со случайными ошибками измерений – «шумом») и квадрата **смещения $S_{\vec a}^2$ на множестве $\widehat{\mathrm P} = \{\rho(x)\}$, характеризующемся оператором S_{BG} с ядром** $S^{\circ}(x, x') = k(x-x_0)(x'-x_0)\delta(x'-x)$.

Соответствующая оптимальная оценка выписана в п.2 и имеет вид (опять же в силу специфического характера ψ_{x_0} и S_{BG}, $\vec u_r = \vec\Phi(S_{BG}\psi_{x_0}) = 0$[16] и $\psi_{x_0}(\rho_M) = \int\delta(x-x_0)dx = 1$):

$$\hat{\vec a}_{BG} = \frac{U^{-1}\vec u_M}{\vec u_M^TU^{-1}\vec u_M}, \tag{19}$$

где $U_{ij} = k\int\varphi_i(x)\varphi_j(x)(x-x_0)^2dx$; $\vec u_M = \left\|\int\varphi_1(x)dx, \int\varphi_2(x)dx, \ldots\right\|^T$ см. (13)).

[14] С некоторой оговоркой: гарантировать знакоопределенность «осредняющего ядра» невозможно.

[15] Отметим, что только специфическая форма функций $S(x, x_0)$ ($S(x_0, x_0)=0$) и функционала ψ_{x_0} позволили Бакусу и Гильберту использовать в критерии (18) форму, не зависящую (формально) от оцениваемого функционала.

[16] $\int\varphi_i(x)dx\int k(x-x_0)(x'-x_0)\delta(x'-x)dx' = \int dx'\varphi_i(x')(x'-x_0)^2\delta(x'-x_0) = 0$