Статистическая интерпретация оператора S_{BG} следующая: ядро $S_{BG}^{x_0}(x,x')$ – корреляционная функция множества функций поля $\rho(x)$ таких, что значения поля в соседних точках не коррелированы, а дисперсия значений растет по мере удаления от **рассматриваемой точки** x_0 как $(x-x_0)^2$. Патологичность такой конструкции S_{BG} проявляется в двух отношениях: во-первых, оценка Б–Г оптимальна только в том случае, если считать, что множество функций поля $\rho(x)$ **зависит от рассматриваемой точки** x_0: $S_{BG}(\cdot) \sim \int S_{BG}^{x_0}(x,x')dx'(\cdot)$; во-вторых, даже оценка единственного функционала (фиксируем точку x_0) будет оптимальной для слишком специфического множества $\{\rho(x)\}$. Поясним второе утверждение.

Парадокс Бакуса–Гильберта. Рассмотрим простую модельную задачу: исследуемое поле $\rho(x)$ – сигнал на входе прибора, $\varphi_i(x)$ – весовые функции (аппаратные функции) прибора, соответствующие трем (для простоты – безошибочным) измерениям; индекс i принимает три значения $i=-x_0$, $i=0$, $i=x_0$:

$$\varphi_{-x_0}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x+x_0)^2}{\sigma^2}\right\};$$

$$\varphi_0=C\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right\}+c\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[x-\left(\frac{C}{c}\right)^{1+\varepsilon}x_0\right]}{\sigma^2}\right\}=\varphi_0^C+\varphi_0^c,$$

где $\varepsilon>0$, $C+c=1$, $C/c\ll 1$,

$$\varphi_{x_0}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right\}\ (\text{рис.1}).$$

Пусть $\frac{x_0}{\sigma}\gg 1$. Требуется оценить по результатам трех измерений значение сигнала $\rho(x)$ в точке $x=0$.

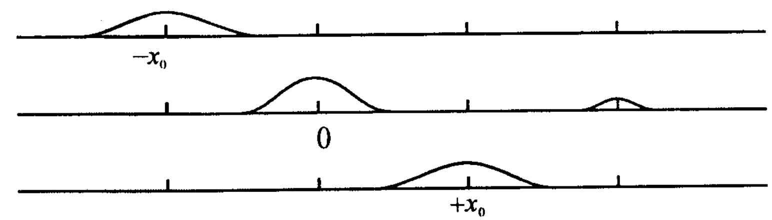

Рис. 1.

Вспоминая, что каждое измерение u_i – функционал $\int\varphi_i(x)\rho(x)dx$, видим, что измерения представляют результат некоторого осреднения сигнала $\rho(x)$ на интервале Δx_i:

$$u_{-x_0}=\frac{\int\rho(x)\varphi_i(x)dx}{\int\varphi_i(x)dx}=\langle\rho\rangle_{-x_0},$$

$$u_0=\frac{\int\rho(x)\varphi_0^C(x)dx+\int\rho(x)\varphi_0^c(x)dx}{\int\varphi_0^C(x)dx+\int\varphi_0^c(x)dx}\approx\frac{\int\rho(x)\varphi_0^C(x)dx}{\int\varphi_0^C(x)dx}=\langle\rho\rangle_0$$

(если только не предполагать, что сигнал $\rho(x)$ по какой-то причине резко растет с ростом x!),

$$u_{x_0}=\langle\rho\rangle_{x_0}.$$

Решение задачи очевидно: наилучшая оценка значения сигнала в точке $x=0$ соответствует тому, что второе измерение должно входить в оценку с максимальным весом, а первое и третье – с примерно равными (если не предполагать резких вариаций сигнала $\rho(x)$ на рассматриваемом интервале), но пренебрежительно малыми (если не предполагать наличие сильных корреляций значений сигнала $\rho(x)$ в точках $x=x_0$, $x=-x_0$ и точке $x=0$) весами.

Никаких представлений о сигнале $\rho(x)$ в методе Бакуса-Гильберта не содержится, поэтому мы вправе ожидать, что оценка по методу Бакуса–Гильберта будет разумной. Вектор оценки $\hat{\vec{a}}$ (т.е. весов, с которыми должны войти в оценку значения $\rho(0)$ результаты измерений) в данном случае:

$$\hat{\vec{a}}_{BG}=\frac{U_{BG}^{-1}\vec{1}}{\vec{1}^T U_{BG}^{-1}\vec{1}},\qquad(19а)$$